Les puissances

C'est quoi ? a^b (a puissance b) signifie que on multiplie a par lui-même b fois

Exemple : $5^3 = 5 \times 5 \times 5$

À quoi ça sert ? Les puissances sont très utilisées en mathématiques, notamment :

- Dans les suites numériques : $u_n = 2 \times 3^n$
- Dans les exponentielles : $f(x) = e^x$
- En probabilité (loi binomiale)
- En physique (ex : diamètre d'un atome : 10^{-10}m)
- Etc.

⇒ Il est fondamental de maîtriser les puissances. Dans le cas contraire, les erreurs de calcul vous ralentiront dans votre résolution de problèmes.

Vocabulaire Le nombre écrit en bas s'appelle « la base »
Le nombre écrit en haut s'appelle « l'exposant »
Ainsi, 2^3 a pour base « 2 » et pour exposant « 3 »

Règles de bases à connaître sur les puissances

1. Multiplication de puissances ayant les mêmes bases

Quand on multiplie deux puissances ayant la même base, on ajoute les exposants

Règle	Exemple	Pourquoi?
$a^b \times a^c = a^{b+c}$	$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$	$2^3 \times 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$

2. Division de puissances ayant les mêmes bases

Quand on divise deux puissances ayant la même base, on soustrait les exposant .

Règle	Exemple	Pourquoi?
$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$	$\frac{2^5}{2^3} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}} = 2 \times 2 = 2^2$

Note : Comme on a barré trois 2 en haut et en bas, on les a enlevés(=soustrait). C'est pour cela (et pour gagner du temps) que l'on peut dire $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

3. Puissance entre parenthèses

Quand il existe une puissance entre parenthèse, il faut multiplier les exposants ensemble.

Règle	Exemples	Pourquoi?
$(a^b)^c = a^{bc}$	$(2^2)^3 = 2^{2\times3} = 2^6$ $(e^x)^2 = e^{2x}$	$(2^2)^3 = (2^2)(2^2)(2^2) = 2^{2+2+2} = 2^{2\times3} = 2^6$ $(e^x)^2 = (e^x)(e^x) = e^{x+x} = e^{2x}$

Quand l'intérieur de la parenthèse contient plusieurs membres, on ne peut calculer directement.
$(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$

On pourra réécrire les différents termes et les distribuer, suivant les identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ex : $(2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3) = 4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 12x + 9$

Si on a une puissance plus grande, on procèdera par étape
Ex : $(2x+3)^3 = (2x+3)(2x+3)(2x+3) = (2x+3)(4x^2+12x+9)$
Ne reste plus qu'à distribuer la parenthèse de gauche avec celle de droite pour terminer le calcul.

Apprendre par cœur sans les comprendre, c'est mal. Assurez-vous de les comprendre pour les mémoriser. Ainsi, même en cas de trou de mémoire, vous ne serez pas bloqué(e).

Exemple : $(7^3)^2 = 7^{3+2} = 7^5$ ou $(7)^2 = 7^{3\times2} = 7^6$?

Revenons au concept de puissances. L'exposant principal, 2, signifie qu'on multiplie la parenthèse deux fois par elle-même

$$(7^3)^2 = (7^3)(7^3)$$

Dans chaque (), l'exposant signifie qu'on multiplie la base 3 fois avec elle-même.

$$(7^3)^2 = (7^3)(7^3) = (7\times7\times7)(7\times7\times7)$$

On a donc écrit le chiffre 7 à six reprises. On peut dès lors affirmer que

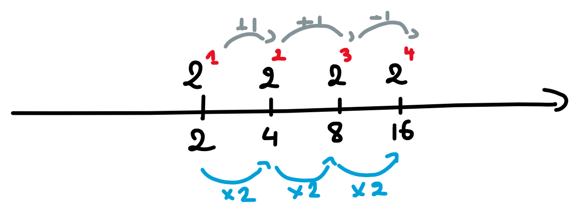
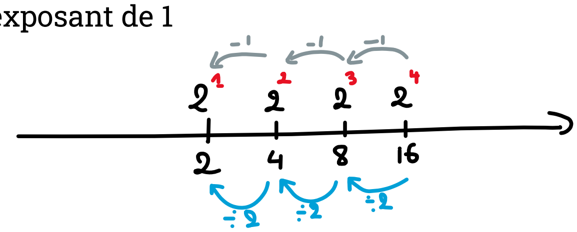
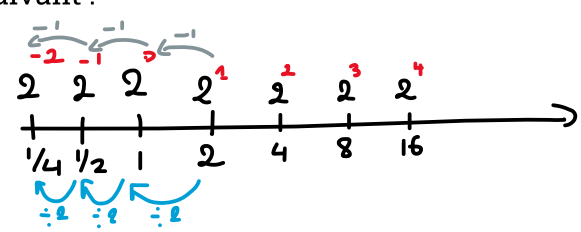
$$(7^3)^2 = (7^3)(7^3) = (7\times7\times7)(7\times7\times7) = 7^6$$

Au final, sans connaître la règle 3 (qui n'est qu'un raccourci), on aboutit au bon résultat 😊

Continuons…

4. Puissance de 0

Les puissances de 0 valent 1.

Règle	Exemples	Pourquoi?
$x^0 = 1$ (si $x \neq 0$)	$2^0 = 1$ $\pi^0 = 1$ $e^0 = 1$	Deux explications possibles **Explication 1** $x^0 = x^{n-n} = \frac{x^n}{x^n} = \frac{\cancel{x^n}(1)}{\cancel{x^n}(1)} = \frac{1}{1} = 1$ **Explication 2** Les puissances indiquent combien de fois on multiplie une base par elle-même. Par exemple :  Chaque fois qu'on va vers la droite, on ajoute 1 à l'exposant car on rajoute une multiplication. Si on adopte le sens inverse, chaque fois qu'on va à gauche, on divise par 2 et on réduit l'exposant de 1  En continuant le raisonnement on aboutirait au résultat suivant :  Cela nous permet de comprendre que les puissances de 0 valent 1 mais aussi que les puissances négatives sont positives $\left(2^{-1} = \frac{1}{2}\right)$

5. Puissance négative

L'exemple précédant nous montre qu'un exposant négatif ne signifie pas que le nombre est négatif ($2^{-2} = \frac{1}{4}$) mais simplement que l'exposant se situe au dénominateur.

Règle	Exemple	Pourquoi?
$a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$	$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$	$a^{-b} = a^{0-b} = \frac{a^0}{a^b}$ (voir règle 2). Or $a^0 = 1$ (voir règle 4) Donc $a^{-b} = \frac{a^0}{a^b} = \frac{1}{a^n}$

En physique, on utilise souvent les puissances négatives pour exprimer la vitesse.
Exemple : si un mobile parcourt 30 mètres en 2 secondes, on dit que

$$v = 15\, m.s^{-1}$$

Pourquoi puissance -1 ?

$$v = \frac{d}{t} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{30\ mètres}{2\ secondes} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{30 \times mètres}{2 \times secondes} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{30}{2} \times \frac{m}{s}$$

$$v = 15\left(\frac{m^1}{s^1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad v = 15 \times m^1 \times s^{-1} \quad (voir\ règle\ 5) \quad \Leftrightarrow \quad v = 15\, m.s^{-1}$$

La puissance négative permet donc de se rappeler que l'unité de temps (ici les secondes) se trouve au dénominateur (a noter : Dans la vie courante, on préfère le slash (130 km/h) à la puissance négative).

6. Puissance implicite

Conventionnellement, quand on n'a une puissance de 1, on ne l'écrit pas.

Règle	Exemple	Comment éviter cette erreur?
$x^1 = x$	☹ $5 \times 5^2 = 25^2$ 😊 $5 \times 5^2 = 5^1 \times 5^2 = 5^3$	**Revenez au concept de puissance.** Une puissance = nombre de fois qu'on multiplie une base par elle-même $5 \times 5^2 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

C'est à cause de cette puissance implicite qu'on parle de fonction du premier degré

- Fonction du 2nd degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Fonction du 1er degré $f(x) = ax + b$ (car $ax + b = ax^1 + b$)

7.Multiplication de puissances ayant les mêmes exposants

Quand on multiplie/divise des puissances ayant le même exposant, on peut regrouper les bases

Règle	Exemple	Pourquoi?
$a^b \times c^b = (a \times c)^b$	$2^3 \times 5^3 =$ $(2 \times 5)^3 =$ $10^3 =$ 1000	**Revenez au concept de puissance.** $2^3 \times 5^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ $2^3 \times 5^3 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$ Pour aller plus vite on dira alors que $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3$
$\frac{a^b}{c^b} = \left(\frac{a}{c}\right)^b$	$\frac{14^3}{7^3} = \left(\frac{14}{7}\right)^3 = 2^3 = 8$	$\frac{14^3}{7^3} = \frac{14 \times 14 \times 14}{7 \times 7 \times 7} = \frac{14}{7} \times \frac{14}{7} \times \frac{14}{7} = \left(\frac{14}{7}\right)^3$

8. Racines carrées

Les racines sont des puissances inverses.

$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Pour cette raison, il est possible de regrouper (ou de séparer les racines) dans les multiplications ou les divisions.

	$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
Exemple	$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = 4^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{2}}$ D'après la règle n°7 : $\sqrt{4} \times \sqrt{9} = (4 \times 9)^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$	$\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \frac{98^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{98}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$
Pour aller plus vite	$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$	$\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$

Dans les autres cas (somme/soustraction), on ne peut rien faire

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ Exemple : $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$

En effet $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 \ldots$

(Niveau Première/Terminale) Le fait de savoir que les racines sont des puissances inverses permet de retrouver des formules de dérivées.

__Exemple :__ Grâce à la formule $x^n \to nx^{n-1}$, détermine la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Or $\quad x^n \to nx^{n-1}$

Donc $\quad x^{\frac{1}{2}} \to \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Exposant négatif = exposant au dénominateur

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

Exposant fractionnaire = racine

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

⇒ La dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ vaut $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

9. Autres cas : on peut factoriser

Dans les autres cas de figure (addition/soustraction de puissances, différents exposants), seule la factorisation permet parfois de simplifier (par le plus petit exposant en commun).

Exemple 1 : $2^{100} + 2^{101} = 2^{100} + 2^{100+1} = 2^{100}(1) + 2^{100}(2) = 2^{100}(1+2) = 2^{100}(3)$

Exemple 2 : $5^7 \times 2^6 = 5^1 \times 5^6 \times 2^6 = 5(5 \times 2)^6 = 5(10^6) = 5\ 000\ 000$

Exemple 3 : $8^{10} \times 2^{-20} = (2^3)^{10} \times 2^{-20} = 2^{30} \times 2^{-20} = 2^{30-20} = 2^{10} = 1024$

Comment voir quelle transformation effectuer ?

En moyenne, un nourrisson tombe 2000 fois avant d'apprendre à marcher. C'est en forgeant qu'on devient forgeron… Bref, ce n'est « que » en vous entraînant encore et encore (et en comprenant ce que vous faites plutôt que d'appliquer machinalement vos formules) que vous allez acquérir des automatismes et gagner en efficacité.

10. Synthèse

Voici le récapitulatif des principales formules à connaître.

Formule algébrique	$a^b \times a^c = a^{b+c}$	$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$	$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$
Exemples	$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$	$(2^2)^3 = 2^{2\times3} = 2^6$ $(e^x)^2 = e^{2x}$

Formule algébrique	$x^0 = 1$	$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$	$x^1 = x$
Exemple	$2^0 = 1$ $e^0 = 1$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$5 \times 5^2 = 5^1 \times 5^2 = 5^3$

Formule algébrique	$a^b \times c^b = (a \times c)^b$	$\sqrt{x} = x^{1/2}$
Exemple	$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3$	$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2}\times 2} = x^1 = x$