



Introduction

La géométrie dans l'espace est l'un des thèmes les plus redoutés des élèves. En effet, ce thème est plutôt abstrait et non modélisable avec la calculatrice, qui n'est pas conçue pour générer des images en 3D. Néanmoins, avec les outils appropriés, c'est sans doute l'un des thèmes où il est le plus facile à marquer des points car

- ✓ Il y a beaucoup moins de formules à connaître que dans les fonctions ou les suites : équation cartésienne de droite, équation de plan, définition du vecteur normal et directeur, produit scalaire, formule de colinéarité, norme... et c'est à peu près tout.
- ✓ Les exercices sont très similaires d'une année à l'autre donc avec un peu de bachotage, il est facile de faire les questions type :

Afin de vous accompagner, je vais vous enseigner :

- Le vocabulaire ;
- Les méthodes permettant de visualiser les démarches à suivre ;
- Les types de questions les plus fréquents.

Plan du dossier

1) Vocabulaire	2
2) Méthode de visualisation	3
3) Questions type	4
a) Déterminer l'équation d'une droite	4
b) Déterminer l'équation d'un plan.....	4
c) Déterminer les coordonnées d'un projeté orthogonal.....	5
d) Calculer la distance ou la norme d'un vecteur	5

1) Vocabulaire

Vecteur : Soit $A(x_a; y_a; z_a)$ et $B(x_b; y_b; z_b)$. Alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}$

⚠ Les points s'écrivent horizontalement et les vecteurs verticalement ⚠

Produit scalaire : Produit de deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et se note $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\text{Calcul : } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Quand $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, les vecteurs sont orthogonaux.

Orthogonal : Perpendiculaire par projection.



La route qui surplombe la route du bas est orthogonale (la route du haut serait « perpendiculaire » à celle du bas si on la descendait), mais elles ne se croisent pas, car elles ne sont pas coplanaires.

Perpendiculaire = Orthogonal + Coplanaire.

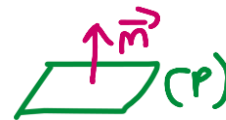
Colinéaire $\approx$ Parallèle. Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont colinéaires **ssi** il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Ex 1 : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?	Ex 2 : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
Oui car $\vec{v} = 2\vec{u}$	$\frac{x}{x'} = \frac{1}{3}$ mais $\frac{y}{y'} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$ $\frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'}$ Donc les vecteurs ne sont PAS colinéaires.

Norme = Distance entre 2 points. Se note $\|\overrightarrow{AB}\|$ et se calcule grâce au théorème de Pythagore :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

Vecteur normal (souvent noté $\vec{n}$) = vecteur perpendiculaire



Vecteur directeur (souvent noté $\vec{u}$) = vecteur qui donne la direction d'une droite



Droite : Élément physique déterminé par un point $A(x_a; y_a; z_a)$ et un vecteur directeur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Cette droite est définie par une **équation paramétrique** (système d'équations)

$$\begin{cases} x = x_a + at \\ y = y_a + bt \\ z = z_a + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Plan : Espace plat (comme une table ou le sol). Définie par un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et un point

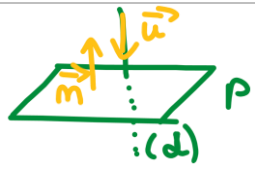
$$\text{Equation cartésienne : } ax + by + cz + d = 0$$

2) Méthode de visualisation

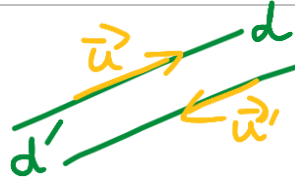
Bien maîtriser le vocabulaire est nécessaire, mais pas suffisant. Sans une méthode rigoureuse, il devient presque impossible de résoudre un problème de géométrie dans l'espace. Pas de stress : voici une méthode en 3 étapes qui vous facilitera le travail.

 Étape 1 : Dessine	Dessine un schéma au brouillon pour voir (voir aide à comprendre) - Quand tu as un énoncé, dessine le plan avec son vecteur normal en perspective cavalière. - Dessine les droites avec leur vecteur directeur.
 Étape 2 : Observe	Observe les vecteurs et regarde s'ils sont parallèles ou orthogonaux.
 Étape 3 : Détermine une stratégie	Détermine une stratégie basée sur les vecteurs et exécute-la Parallèle = colinéaire ($\vec{u} = k\vec{v}$) Perpendiculaire = produit scalaire nul ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$)

Exemple 1 : L'énoncé me dit : « Montrer que (d) est perpendiculaire au plan P »

	Je dessine J'observe : $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont parallèles. Je conclus : Il faut montrer que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ Il faut vérifier que $\vec{n} = k\vec{u}$
---	--

Exemple 2 : L'énoncé me dit « Montre que (d) et (d') sont parallèles »

	Je dessine J'observe : $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont parallèles Stratégie : Il faut montrer que $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires $\rightarrow$ Quand l'énoncé dit « Montre que (d) et (d') sont parallèles » il faut identifier $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ et montrer que $\vec{u} = k\vec{u}'$
---	--

Exemple 3 : L'énoncé me dit « Montre que (P) et (d) sont parallèles :

	Je dessine J'observe : $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux Conclusion : il faut montrer que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$
---	--

Bref, dessinez au lieu de vous lancer directement. Cela vous sera très utile 😊.

3) Questions type

a) Déterminer l'équation d'une droite

Formule générale	Exemple
Une droite passant par $A(x_a; y_a; z_a)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne : $\begin{cases} x = x_a + at \\ y = y_a + bt \\ z = z_a + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$	Soit A (1 ; 2 ; -3) et B (5 ; -2 ; -3) deux points de l'espace. Détermine l'équation paramétrique de la droite (AB). Étape 1 : Je calcule un vecteur normal : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -2-2 \\ -3-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Étape 2 : Je remplace dans l'équation : $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + (-4)t \\ z = -3 + 0t \end{cases}$

b) Déterminer l'équation d'un plan

Méthode	Exemple
- Détermine deux vecteurs du plan et montre qu'ils ne sont pas colinéaires. - Il faut prouver que le vecteur de l'énoncé est normal avec deux vecteurs non colinéaires du plan. - Remplace a, b, c de l'équation cartésienne du plan par le vecteur donné par l'énoncé. - Utilise un point du plan pour trouver d en remplaçant x, y, z par les coordonnées du point.	Soit 3 points $A(-2; 0; 2)$, $B(-1; 3; 0)$ et $C(1; -1; 2)$ Q1. Démontrer que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\frac{x}{x'} = \frac{1}{3}$ et $\frac{y}{y'} = \frac{3}{-1} = -3$ $\frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'}$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A,B,C forment un plan $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 1(1) + 3(3) + 5(-2) = 0$ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1(3) + 3(-1) + 5(0) = 0$ $\vec{n}$ est normal à P_{ABC} Question 2: Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + 3y + 5z - 8 = 0$ Je sais que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est normal au plan Donc P_{ABC} a pour équation cartésienne : $1x + 3y + 5z + d = 0$ Or $A(-2; 0; 2) \in P_{ABC} \Leftrightarrow 1(-2) + 3(0) + 5(2) + d = 0$ $\Leftrightarrow 8 + d = 0$ $\Leftrightarrow d = -8$ Donc P_{ABC} a pour équation cartésienne : $x + 3y + 5z + (-8) = 0$

c) Déterminer les coordonnées d'un projeté orthogonal

Méthode	Exemple (inspiré d'Amérique du Nord 21 mai 2025)
1) Dessiner  2) Élaborer une stratégie Le schéma me permet de voir que (AH) est parallèle à $\vec{n}$. Donc $\vec{n}$ dirige (AH). Je peux peut-être définir (AH)... Bon point de départ...	Soit $A(5; -4; -1)$ un point de l'espace. Soit P un plan d'équation $x + 3z - 7 = 0$ Q1 : Détermine les coordonnées de H, projeté orthogonal de A sur P
Étapes	Corrigé
1) Définir (AH) 2) Calculer les coordonnées de H en créant un système d'équations basé sur le fait que $H \in \begin{pmatrix} (AH) \\ P \end{pmatrix}$ On remplace x, y, z pour calculer t. On remplace t dans les trois premières lignes pour déduire les coordonnées de H.	Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ H étant le projeté orthogonal de A sur P, (AH) a pour vecteur directeur $\vec{n}$ (AH) a donc pour équation cartésienne $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -4 + 0t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ Par ailleurs, $H \in \begin{pmatrix} (AH) \\ P \end{pmatrix}$ donc $H \in \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -4 \\ z = -1 + 3t \\ x + 3z - 7 = 0 \end{cases}$ La ligne 4 donne $\begin{aligned} x + 3z - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5 + t) + 3(-1 + 3t) - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5 + t - 3 + 9t - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow 10t - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$ On en déduit que $H \in \begin{cases} x = 5 + \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2} \\ y = -4 \\ z = -1 + 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$ H a pour coordonnées $\left(\frac{11}{2}, -4, \frac{1}{2}\right)$

d) Calculer la distance ou la norme d'un vecteur

Méthode	Exemple
Étape 1 : Il faut calculer le vecteur Étape 2 : Puis la norme du vecteur	Q2 : Que vaut la longueur (AH) ?
Étape 1 : Je sais que $A(5; -4; -1)$ et $H\left(\frac{11}{2}, -4, \frac{1}{2}\right)$. Donc $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{11}{2}-5 \\ -4-(-4) \\ \frac{1}{2}-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ Étape 2 : $AH = \ \overrightarrow{AH}\ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$	

Ce dossier est désormais terminé. J'espère qu'il vous a plu et bon courage pour le bac. 