🎲 Probabilités au bac 🎲

Les probabilités sont l'un des 4 grands thèmes majeurs évalués au bac (les trois autres étant l'analyse de fonctions, la géométrie dans l'espace et les suites)

Au baccalauréat, l'exercice de probabilité vaut généralement 5 points et est généralement découpé en deux parties : la partie A évaluant les acquis de première et la partie B évaluant les acquis de terminale. Voici plus spécifiquement les choses à maîtriser :

- **Programme de première :** arbre pondéré/proba conditionnelle, plus rarement les lois de probabilités.
- **Programme de terminale :** loi binomiale et la loi des grands nombres (notamment Bienaimé-Tchebychev).

⚠️ Depuis la période post-covid, les concepteurs de sujet de bac aiment bien associer les probas avec d'autres thèmes (comme proba + suites notamment)

Table des matières

1) Programme de première

Vocabulaire Et = ∩ = × OU = ∪ = + $\bar{A}$ = évènement contraire de A

Arbre pondéré : on modélise les évènements successifs avec un arbre de probabilités
On multiplie les probabilités successives et on ajoute les branches

Probabilité conditionnelle : probabilité qu'un évènement se réalise sachant qu'un autre est déjà réalisé. $p(A \text{ sachant } B) = p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$

Indépendance : A et B sont indépendants ssi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
ou
$p_A(B) = p(B)$

Loi de probabilités = tableau à deux lignes récapitulant les différents évènements et les probabilités associées

Espérance (notée E(X)) = moyenne. $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(x_i)$

Variance (notée $V(X)$)= $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \times [x_i - E(X)]^2$

Écart-type (noté σ) : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Exercice type 1 (représentatif de la partie A des exercices de proba au bac)

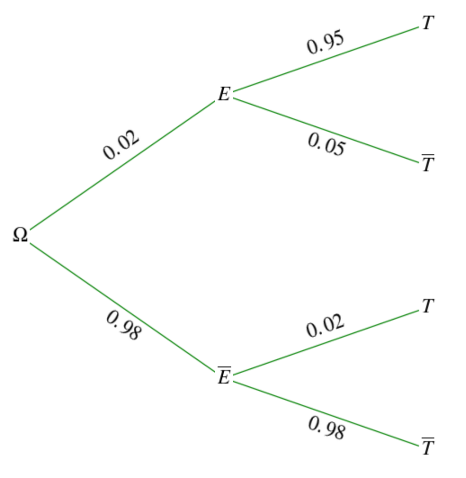
Un laboratoire a mis au point un alcootest. On sait que :

- Lorsqu'une personne est en état d'ébriété, 95 fois sur 100 l'alcootest est positif.
- Lorsqu'une personne n'est pas un état d'ébriété, 98 fois sur 100, l'alcootest est négatif.
- On sait 2 % des personnes contrôlées par la police sont en état d'ébriété.

On interroge une personne ayant participé aux essais. On note : E : « la personne est en état d'ébriété » et T : « le test est positif »

- 1) Traduire les données de l'énoncé à l'aide des notations données puis construire l'arbre de probabilité.
- 2) Calculer la probabilité qu'une personne soit en état d'ébriété et que le test soit positif.
- 3) Quelle est la probabilité qu'une personne contrôlée soit testée positive ?
- 4) Claude s'est fait contrôle positif. Quelle est la probabilité que Claude soit en état d'ébriété ?

Question 1



Question 2 :

$$p(E \cap T) = p(E) \times p_E(T) = 0{,}02 \times 0{,}95 = 0{,}019$$

Question 3

D'après la loi des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(T) &= p(E \cap T) + p(\bar{E} \cap T) \\ &= 0{,}019 + p(\bar{E}) \times p_{\bar{E}}(T) \\ &= 0{,}019 + 0{,}98 \times 0{,}02 \\ &= 0{,}0386 \end{aligned}$$

Question 4 : C'est une probabilité conditionnelle :

$$p_T(E) = \frac{p(E \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}019}{0{,}0386} \approx 0{,}49$$

Il n'y a « que » 49% de chance que Claude soit en état d'ébriété (et 51% de chance de « faux positif » : déclaré en état d'ébriété à tort par le test).

2) Programme de terminale

Les principaux éléments au programme de termine à connaître sont les suivants : loi binomiale et loi des grands nombres (plus particulièrement l'inégalité e Bienaimé-Tchebychev)

a) Loi binomiale

Définition : Une loi binomiale modélise une série d'évènements indépendants (ex : lancer de pièce) n'ayant que deux issues possibles : « succès » (exemple : pile) ou « échec » (exemple : face).

Paramètres : Loi binomiale = 2 paramètres : n= Nombre d'évènements.
p= Probabilité de succès.

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

k = Nombre de succès

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Espérance (≈ moyenne) : $E(x) = np$

Variance = $V(x) = np(1-p)$

Écart-type : $\boldsymbol{\sigma} =$ $\sqrt{V(x)}$ ou Variance= σ^2

$\boldsymbol{p(X \geq 1)} = 1 - p(X = 0)$ ← Pratique quand l'énoncé demande « quelle est la probabilité qu'au moins un test soit positif ? »

b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'approximer une probabilité même sans connaître grand-chose sur la loi de probabilité étudiée :

$p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$

$V(X) = Variance$

$\delta =$ Seuil donné par l'énoncé correspondant à la distance entre la borne et l'espérance.

$||$ = valeur absolue

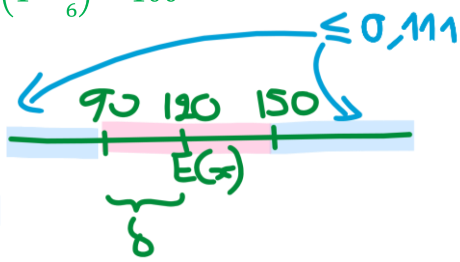
Par déduction $p(E(X) - \delta \leq X \leq E(X) + \delta) = 1 - p(|x - E(X)| \geq \delta)$

c) Exercice type – Loi binomiale et Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Ci-dessous se trouve un exercice type qui ressemble à la partie B des exercices de probabilités susceptibles de « tomber » au bac :

Exercice : On lance 720 fois un dé équilibré à six faces. On note X le nombre d'apparitions du chiffre 4.

1) Montrer que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2) Calcule $E(X)$ et interpréter dans le contexte de l'énoncé.
3) Quelle est la probabilité que le 4 apparaisse au moins une fois au cours des 720 lancers ? Donner la valeur exacte et approchée et interpréter.
4) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, prouver l'affirmation suivante :
$$p(90 < X < 150) \geq 0{,}88$$

Q₁	Chaque lancer de dé est indépendant des autres lancers. Chaque lancer n'a que deux issues possibles : « succès » (obtenir 4) ou « échec » (ne pas obtenir 4). ⇨ **X suit donc une loi binomiale de paramètres $B(720, \frac{1}{6})$** $-$ *ici*, $n = 720$ et $p = \frac{1}{6}$
Q₂	$$E(X) = np = 720\left(\frac{1}{6}\right) = 120$$ Cela signifie qu'au cours des 720 lancers, le nombre 4 apparaîtra en moyenne 120 fois.
Q₃	D'après la loi des probabilités totales, $p(X = 0) + p(X \geq 1) = 1$ D'où $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$ Or, $p(X = 0) = \binom{720}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1 - \frac{5}{6}\right)^{720-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{720} = \left(\frac{5}{6}\right)^{720}$ ⇨ **D'où $p(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{720} \approx 1$** ⇨ **Il y a quasiment 100% de chances que le 4 apparaisse au moins 1 fois au cours des 720 lancers.**
Q₄	On sait que $P(\lvert X - E(X)\rvert \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ Ici, $\delta = 30$ — distance entre les bornes (90 et 150) et l'espérance qui est de 120. On a aussi besoin de $V(X) = np(1-p) = 720\left(\frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) = 100$ On en déduit que : $P(\lvert X - 120\rvert \geq 30) \leq \frac{100}{30^2}$ $P(\lvert X - 120\rvert \geq 30) \leq 0{,}111$  D'où $P(\lvert X - 120\rvert < 30) \geq 1 - p(\lvert X - 120\rvert \geq 30)$ $\geq 1 - 0{,}111$ $\geq 0{,}888$ On a bien montré que $p(\lvert X - 120\rvert < 30)$, qui signifie exactement la même chose que $P(90 < X < 150) \geq 0{,}888$. Or $0{,}888 \geq 0{,}88$ ➔ **L'affirmation est donc vraie.**

Bien sûr, les exercices du bac peuvent être parfois plus difficiles (loi de paramètre n inconnu et à déterminer avec l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, comme dans l'exercice 2 partie B du sujet Asie 11 juin 2025), mais maîtriser les bases de cette fiche vous assurera avec une quasi-certitude (si vous rédigez correctement) une bonne note concernant l'exercice de probabilités. C'est une affaire… de probabilités. 😅

Ce dossier est désormais terminé. J'espère qu'il vous a plu et bon courage pour le bac. 💪