Résumé des suites au bac

Les suites sont l'un des 4 grands thèmes qui tombent chaque année au baccalauréat. Les exercices portent aussi bien sur le programme de première que de terminale. Voici ce qu'il faut connaître :

1) Programme de Première

<table>
<tr><th></th><th>Suite arithmétique</th><th>Suite géométrique</th></tr>
<tr><td>C'est quoi ?</td><td>$1-3-5-7\ldots$
On ajoute une raison notée r
Ici $r=2$</td><td>$2-6-18-54\ldots$
On multiplie par une raison notée q
Ici $q=3$</td></tr>
<tr><td>Deux expressions :
1) Expression explicite
C'est la formule à donner quand on te demande « exprimer u_n en fonction de n »</td><td>$u_n = u_{premier} + (n-p)r$
u_1
Exemple : 1-3-5-7…
$u_n = u_1 + (n-1)2$
$u_n = 1 + 2n - 2$
$u_n = 2n - 1$</td><td>$u_n = u_{premier} \times q^{nombre\ de\ termes}$
u_0
Exemple : 2-6-18-54…
$u_n = 2 \times 3^n$</td></tr>
<tr><td>2) Expression de récurrence
On définit le premier terme et la relation d'un terme au suivant</td><td>Ex : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$</td><td>Ex : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Variations</td><td colspan="2">On calcule $u_{n+1} - u_n$.
Si résultat > 0, la suite est croissante
Si résultat < 0, la suite est décroissante

Ex : Montre que $u_n = 2 \times 3^n$ est croissante
$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$
$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 3^n[2 \times 3 - 2]$
$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 3^n[4]$
Par produit de positifs ($3^n > 0$) on en déduit que la suite est croissante</td></tr>
<tr><td>Somme de suites</td><td>Somme = Moyenne x Nombre de termes

• Moyenne = $\frac{Premier+Dernier}{2}$
• Nombre de termes :
• Rang du dernier – Rang du premier + 1</td><td>Somme = $u_{premier} \times \frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$</td></tr>
<tr><td></td><td>Exemple : Calcule $10 + 13 + 16 + 19 \ldots + 1003$

Moyenne = $\frac{10+1003}{2} = \frac{1013}{2} = 506{,}5$
Nombre de termes = il faut connaitre le rang du dernier
Appelons $u_0 = 10$. Ici $r = 3$
$u_n = u_{premier} + (n-p)r$
$u_n = u_0 + (n-0)3$
$u_n = 10 + 3n$
Pour connaitre le rang de 1003
$u_n = 1003$
$10 + 3n = 1003$
$3n = 993$
$n = 331$

Nombre de termes = 331-0+1=332

Somme = $506{,}5 \times 332 = 168158$</td><td>Calcule $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486$

Ici c'est géométrique avec q=3. On a 6 termes.
Somme = $2 \times \frac{1-3^6}{1-3} = 728$</td></tr>
</table>

2) Programme de terminale

Les principales choses à connaître sont les suivantes : **raisonnement par récurrence**, et les **limites** (théorème du gendarme, comparaison, point fixe avec $f(l) = l$)

a) Raisonnement par récurrence

Cela permet de vérifier une propriété

Deux étapes : Initialisation : vérifie que c'est vrai au rang initial.
Hérédité : Suppose que u_n est vraie. Montre que u_{n+1} est vraie.

🧑‍🏫 **Conseil :** Écris au brouillon la première ligne ($u_n = blabla$) la dernière un peu plus bas ($u_{n+1} = résultat\ attenu$) et commence par transformer le membre de gauche.

Exemple : Soit $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Démontre par récurrence que $u_n = 2^n - 1$

Initialisation : Pour $n = 1$ **D'une part :** $u_n = u_1 = 1$ (énoncé)
D'autre part : $2^n - 1 = 2^1 - 1 = 1$
L'initialisation est vérifiée (pour $n = 1$, on a bien $u_n = 2^n - 1$)

Hérédité : **Supposons qu'il existe un entier n** non nul tel que $u_n = 2^n - 1$
Montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$ $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

Copie	Brouillon
$u_n = 2^n - 1$ $\Leftrightarrow 2 \times u_n = 2 \times (2^n - 1)$ $\Leftrightarrow 2u_n = 2^{n+1} - 2$ $\Leftrightarrow 2u_n + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1$ $u_{\Leftrightarrow n+1} = 2^{n+1} - 1$ La relation de récurrence est vérifiée. Pour tout entier $n \geq 1$, la propriété est vraie.	$\boxed{u_n} = 2^n - 1$ ×2 +1 $\boxed{u_{n+1}} = 2^{n+1} - 1$ Pour transformer $u_n \to u_{n+1}$, il faut $\times$ 2 puis +1

⚠ **Erreur type :** $2 \times 2^n \neq 4^n$. Exemple : $2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$ et $4^2 = 16$
$2 \times 2^n = 2^1 \times 2^n = 2^{n+1}$

🧑‍🏫 Pour le reste, même si $2 \times 2^n = 4^n$ (ce qui n'est pas vrai), cette transformation ne serait pas appropriée dans le contexte de cette récurrence. En effet, notre objectif (=dernière ligne) est d'obtenir l'expression $2^{n+1} - 1$ qui ne contient que des puissances de 2. Transformer vers 4^n nous éloignerait de cet objectif et rendrait la démonstration impossible à terminer.

b) Transitivité

Dans les démonstrations par récurrence impliquant des inéquations, il faut parfois avoir recours à la transitivité ($A > B$ et $B > C$ donc $A > C$) pour conclure le raisonnement

Exemple : Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $3^n \geq 2^n$

Initialisation. Pour $n = 0$, $3^n = 3^0 = 1$
$2^n = 2^0 = 1$
L'inéquation $3^n \geq 2^n$ est vraie au rang $n = 0$

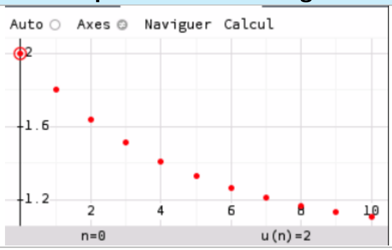
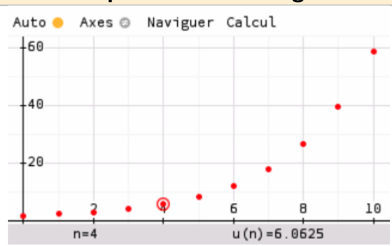
Hérédité Supposons qu'il existe un entier n non nul tel que , $3^n \geq 2^n$
Montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1 \Leftrightarrow$, $3^{n+1} \geq 2^{n+1}$
$3^n \geq 2^n$
$\Leftrightarrow 3 \times 3^n \geq 3 \times 2^n$
$\Leftrightarrow \mathbf{3^{n+1} \geq 3 \times 2^n \geq 2 \times 2^n}$ (comme on a **A**>**B** et qu'on veut A>C alors on compare B et C)
Par transitivité $3^{n+1} \geq 2^{n+1}$

L'initialisation et l'hérédité ayant été vérifiées, on a bien $3^n \geq 2^n$ pour tout entier naturel n.

c) Limites (cas simples)

Vocabulaire **Converger** = se stabiliser ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = k$)

Diverger = ne pas converger (soit tendre vers +∞ ou -∞ ou pas de limite).

Exemple de suite convergente	Exemple de suite divergente
	

Limites de suites arithmétiques et géométriques (cas le plus simple)

Suite arithmétique	Suite géométrique
Si $r > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ Si $r < 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	**Si $q > 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$** **Si $0 < q < 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$** **Exemple :** Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 \times 0{,}8^n$ **Réponse :** $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$ Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 \times 0{,}8^n = -3(0) = 0$

d) Limites (cas complexes)

Lorsque les suites sont plus complexes, il existe 5 moyens de calculer les limites :

- Factoriser
- Théorème de croissance comparée
- Théorème du gendarme
- Théorème de comparaison
- Théorème de convergence + point fixe

Cas 1 et 2 : Forme indéterminée et croissance comparée

Contexte : Il existe 4 formes indéterminées : $\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

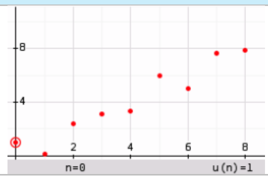
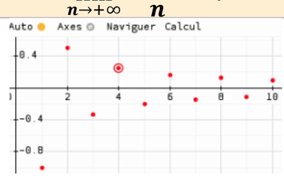
Stratégie 1 : Factoriser par le terme de plus haut degré (quand on a un polynôme)	Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+2}{2n^2+n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+2}{2n^2+n} = \frac{+\infty}{+} = FI$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+2}{2n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(2+\frac{1}{n}\right)}$ D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n^2} = 1$ D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$ Par quotient de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$
Stratégie 2 (rare) : Théorème de croissance comparée (si on a exp/ln)	Théorème de croissance comparée : « l'exponentielle l'emporte sur le polynôme, le polynôme l'emporte sur ln ». Dit autrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ Cette propriété reste vraie sur les suites mais demeure très peu testée au bac.

Cas 3 et 4 : théorème du gendarme et théorème de comparaison

	Théorème du gendarme	Théorème de comparaison
Propriété	Si $u_n < v_n < w_n$ Et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = k$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = k$	Si $u_n < v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ Variante Si $u_n > v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
Quand l'utiliser ?	Quand tu as $(-1)^n$ ou cos ou sin et que cela semble **convergent** (d'après le tracé sur ta calculatrice)	Quand tu as $(-1)^n$ ou cos ou sin et que cela semble **divergent** (d'après le tracé sur ta calculatrice)

⚠ Pour savoir quel théorème utiliser, tracez la fonction sur votre calculatrice et regardez à quoi ressemble la suite.

- Si la suite semble converger → théorème des gendarmes
- Si la suite semble diverger → théorème de comparaison

$\lim\limits_{n\to+\infty} n + \cos(10n) = ?$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = ?$
	
Observation : Ça a l'air divergent (pas de stabilisation car croissante globalement) mais je ne connais pas la limite de cos(10n) car rappel de trigo : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$	**Observation :** Elle semble converger vers 0
Stratégie : Théorème de comparaison avec minoration	**Stratégie :** Théorème des gendarmes
$n - 1 \leq n + \cos(10n)$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$ Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} n + \cos(10n) = +\infty$	$\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Cas 5 : Théorème de convergence + point fixe

Souvent, les sujets de bac mélangent suites et fonctions en se basant sur la propriété $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$.

Exemple : $u_{n+1} = 3u_n + 2$ revient au même que de dire $f(x) = 3x + 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
En effet, si $f(x) = 3x + 2$
$f(u_n) = 3u_n + 2$
Or $u_{n+1} = 3u_n + 2$ Donc $f(u_n) = u_{n+1}$

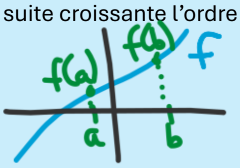
Généralement, ce type d'exercices fait intervenir les 4 questions suivantes :

- 1) Étudier les variations de f pour pouvoir utiliser la propriété de la conservation de l'ordre
- 2) Démontrer une inégalité, souvent via un raisonnement par récurrence
- 3) Prouver une convergence grâce au **théorème de convergence**
- 4) Déterminer une limite avec le **théorème du point fixe**

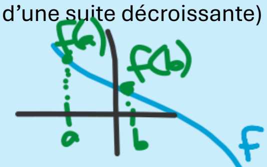
Théorème de convergence : Une suite croissante et majorée converge (tout comme une suite décroissante et minorée).

Théorème du point fixe : lorsqu'une suite u_n vérifie l'équation $u_{n+1} = f(u_n)$ et que la suite converge, c.a.d $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors sa limite l vérifie l'équation $f(l) = l$

Rappel : Une suite croissante l'ordre (ce qui n'est pas le cas d'une suite décroissante)



Lorsque f est croissante, f **conserve** l'ordre.
$a < b$
$f(a) < f(b)$



Les fonctions décroissantes **inversent** l'ordre.
$a < b$
$f(a) > f(b)$

3) Exercice type

Voici un exercice type de suites avec le corrigé et les commentaires de prof. Essayez de retenir les stratégies, car les exercices se ressemblent d'une session de bac à l'autre...

Exercice 3 • 22 mai 2024 • Amérique du Nord (source)

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $[0\,;1]$

$$g' = 2 - 2x$$

Racine : $g'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
g'		$+$		0	$-$	

Sur $[0\,;1]$, $g' > 0$ donc g est croissante avec

$$g(0) = 2(0) - 0^2 = 0$$
$$g(1) = 2(1) - 1^2 = 1$$

2. $u_1 = g(u_0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ et $u_2 = g(u_1) = g\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$

3. Initialisation. Pour $n = 0$

D'une part : $u_n = u_0 = \frac{1}{2}$ (voir énoncé)

D'autre part : $u_{n+1} = u_1 = \frac{3}{4}$ (voir question 2)

$0 < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$

Donc pour $n = 0$, on a $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

Hérédité

$$0 < u_n < u_{n+1} < 1$$
$$\Leftrightarrow g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$$

(car g est croissante donc conserve l'ordre)

Or g(0)=0 et g(1)=1 (voir question 1). On a donc

$$\Leftrightarrow 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

L'hérédité est vérifiée

Par principe de récurrence, on a bien démontré que pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

Brouillon

$$0 < u_n < u_{n+1} < 1$$
$$\downarrow$$
$$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

4. La suite est croissante ($u_n < u_{n+1}$) et majorée ($u_{n+1} < 1$).

D'après le théorème de convergence, la suite est convergente vers une limite l ($l \in \mathbb{R}$)

⚠ **Erreur courante :** Écrire « la suite converge vers 1 ». Majoré par 1 ne signifie pas que l vaille automatiquement 1. Ce n'est le cas que si l est le meilleur majorant, mais ce n'est pas toujours le cas.

Dans un exemple plus simple, on peut majorer l'âge des mineurs par 18 ans (meilleur majorant) mais aussi par 50 ans (mineurs < 50 ans) ce que ne signifie pas nécessairement qu'un mineur puisse avoir 50 ans...

5. u_n étant convergente, d'après le théorème du point fixe, sa limite l vérifie l'équation $g(l) = l$

$$g(l) = l$$
$$\Leftrightarrow 2l - l^2 = l$$
$$\Leftrightarrow l - l^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow l(1 - l) = 0$$
$$\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1$$

Or, comme $u_1 = \frac{1}{2}$ et que la suite est croissante alors $l \neq 0$ ➔ $l = 1$

Ce module est désormais terminé. J'espère qu'il vous a plu et bon courage pour le bac 💪